

Alors, on voit que

$$\left. \begin{aligned} A &\xrightarrow{L_i \leftrightarrow L_j} E(L_i \leftrightarrow L_j) \cdot A \\ A &\xrightarrow{L_i \leftarrow \lambda L_i} E(L_i \leftarrow \lambda L_i) \cdot A \\ A &\xrightarrow{L_i \leftarrow L_i + \lambda L_j} E(L_i \leftarrow L_i + \lambda L_j) \cdot A \end{aligned} \right\} \text{Vérifier-le! } \nabla$$

par définition de produit matriciel et des matrices $E(?)$.

Par exemple:

$$\underbrace{\begin{pmatrix} 1 & & & & \\ & \ddots & & & \\ & & 0 & & 1 \\ & & & \ddots & \\ & & & & 1 \end{pmatrix}}_{E(L_i \leftrightarrow L_j)} \cdot \underbrace{\begin{pmatrix} A_{1,1} & \dots & A_{1,m} \\ \vdots & & \vdots \\ A_{n,1} & \dots & A_{n,m} \end{pmatrix}}_A = \begin{pmatrix} A_{1,1} & \dots & A_{1,m} \\ \vdots & & \vdots \\ A_{j-1,1} & \dots & A_{j-1,m} \\ A_{j+1,1} & \dots & A_{j+1,m} \\ \vdots & & \vdots \\ A_{n,1} & \dots & A_{n,m} \end{pmatrix} \begin{matrix} \text{--- } i\text{-ème ligne} \\ \text{--- } j\text{-ème ligne} \end{matrix}$$

Dans cette séance, on va voir:

(03.10)

(revoir les deux pages précédentes des notes manuscrites)

- lien entre matrices élémentaires et matrices inversibles;
- le calcul de l'inverse d'une matrice carrée inversible avec la méthode de Gauss-Jordan; $\leadsto$ exemples aussi!
- d'autres descriptions de l'inversibilité;

Corollaire (Lemme 12) Toute matrice élémentaire est inversible.

(Preuve) En effet,

- $I_n \xrightarrow{L_i \leftrightarrow L_j} E(L_i \leftrightarrow L_j) \cdot I_n = E(L_i \leftrightarrow L_j) \xrightarrow{L_i \leftrightarrow L_j} E(L_i \leftrightarrow L_j) \cdot E(L_i \leftrightarrow L_j) \Rightarrow E(L_i \leftrightarrow L_j)^{-1} = E(L_i \leftrightarrow L_j)$
 $= I_n \nabla \text{ car } \left| \begin{array}{c|c} L_i \leftrightarrow L_j & L_i \leftrightarrow L_j \\ \hline \end{array} \right| = id$
- $I_n \xrightarrow{L_i \leftarrow \lambda L_i} E(L_i \leftarrow \lambda L_i) \cdot I_n = E(L_i \leftarrow \lambda L_i) \xrightarrow{L_i \leftarrow \frac{1}{\lambda} L_i} E(L_i \leftarrow \frac{1}{\lambda} L_i) E(L_i \leftarrow \lambda L_i) \Rightarrow E(L_i \leftarrow \lambda L_i)^{-1} = E(L_i \leftarrow \frac{1}{\lambda} L_i)$
 $= I_n \nabla \text{ car } \left| \begin{array}{c|c} L_i \leftarrow \lambda L_i & L_i \leftarrow \frac{1}{\lambda} L_i \\ \hline \end{array} \right| = id$
- $I_n \xrightarrow{L_i \leftarrow L_i + \lambda L_j} E(L_i \leftarrow L_i + \lambda L_j) \cdot I_n = E(L_i \leftarrow L_i + \lambda L_j) \xrightarrow{L_i \leftarrow L_i - \lambda L_j} E(L_i \leftarrow L_i - \lambda L_j) E(L_i \leftarrow L_i + \lambda L_j) \Rightarrow E(L_i \leftarrow L_i + \lambda L_j)^{-1} = E(L_i \leftarrow L_i - \lambda L_j)$
 $= I_n \nabla \text{ car } \left| \begin{array}{c|c} L_i \leftarrow L_i + \lambda L_j & L_i \leftarrow L_i - \lambda L_j \\ \hline \end{array} \right| = id$

Thm. 7.12 | Soit $A \in M_n(\mathbb{R})$. Alors, A est inversible ssi il existe des matrices élémentaires $E^{(1)}, \dots, E^{(p)}$ telles que

$$I_n = E^{(p)} \dots E^{(1)} A$$

En particulier, A est inversible ssi A est un produit de matrices élémentaires

voir
"Pourquoi calculer
des inverses?"
avant §7.3?

(Preuve) $\Rightarrow$ Si A est inversible, alors le SEL $A\vec{x} = \vec{b}$ admet une unique solution pour tout $\vec{b} \in \mathbb{R}^n$. En conséquence la FER de $\underbrace{[A : \vec{b}]}_{\substack{\text{n+1 colonnes} \\ \text{lignes}}}$ n'admet aucune variable libre, et donc on a n pivots, à gauche de la ligne pointillée. Cela implique que la FER de $[A : \vec{b}]$ est $[I_n : \vec{b}^{-1}]$. D'après le thm précédent, il existe des matrices élémentaires $E^{(1)}, \dots, E^{(p)}$ telles que

$$[I_n : \vec{b}^{-1}] = E^{(p)} \dots E^{(1)} [A : \vec{b}]$$

ce qui implique $I_n = E^{(p)} \dots E^{(1)} A$.

$\Leftarrow$ L'identité $I_n = E^{(p)} \dots E^{(1)} A$ nous dit que

$$(E^{(1)})^{-1} \dots (E^{(p)})^{-1} I_n = (E^{(1)})^{-1} \dots \underbrace{(E^{(p)})^{-1} E^{(p)}}_{I_n} \dots E^{(1)} A$$

vu que $E^{(p)}, \dots, E^{(1)}$ sont inversibles, i.e.

$$\underbrace{(E^{(1)})^{-1}}_{\text{matrice}} \dots \underbrace{(E^{(p)})^{-1}}_{\text{matrice}} = A$$

élémentaire $\Rightarrow$ inversible $\Rightarrow$ produit d'inversibles $\Rightarrow$ inversible $\Rightarrow A$ inversible $\square$

Le calcul de l'inverse d'une matrice inversible

Ideée | Pour $A \in M_n(\mathbb{R})$, on écrit $[A : I_n]$ et on trouve

la FER respective :

[24]

$$\begin{aligned}
 [A \mid I_n] &\longrightarrow \underbrace{E^{(n)} \dots E^{(1)}}_{\text{red}} [A \mid I_n] \\
 &= [E^{(n)} \dots E^{(1)} \cdot A \mid E^{(n)} \dots E^{(1)} \cdot I_n] \\
 &= [E^{(n)} \dots E^{(1)} \cdot A \mid E^{(n)} \dots E^{(1)}]
 \end{aligned}$$

Or A inversible ssi l'on peut trouver $E^{(1)}, \dots, E^{(n)}$ telles que $E^{(n)} \dots E^{(1)} A = I_n$
 et dans ce cas $\boxed{E^{(n)} \dots E^{(1)} = A^{-1}}$

Conclusion

A inversible ssi la FER de $[A \mid I_n]$
 est $[I_n \mid \underbrace{B}_{\in M_n(\mathbb{R})}]$.

$\underline{\underline{I_n \text{ plus}}} : \underbrace{B = A^{-1}}_{\text{red}} \nabla$

Exemple 7.1.4 On veut montrer que $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 3 \\ 4 & -3 & 8 \end{pmatrix}$ est inversible
 et calculer A^{-1} . On considère

$$\left(\underbrace{\begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 3 \\ 4 & -3 & 8 \end{pmatrix}}_A \mid \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}}_{I_3} \right) \xrightarrow{L_1 \leftrightarrow L_2} \left(\begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 2 \\ 4 & -3 & 8 \end{pmatrix} \mid \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \right)$$

$$\xrightarrow{L_3 \leftarrow L_3 - 4L_1} \left(\begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & -3 & -4 \end{pmatrix} \mid \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & -4 & 1 \end{pmatrix} \right) \xrightarrow{L_3 \leftarrow L_3 + 3L_2} \left(\begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \mid \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 3 & -4 & 1 \end{pmatrix} \right)$$

$$L_1 \leftarrow L_1 - L_3$$

$$\xrightarrow{L_2 \leftarrow L_2 - L_3} \left(\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \mid \begin{pmatrix} -3 & 5 & -1 \\ -2 & 4 & -1 \\ 3 & -4 & 1 \end{pmatrix} \right) \xrightarrow{L_3 \leftarrow \frac{L_3}{2}} \left(\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \mid \begin{pmatrix} -3 & 5 & -1 \\ -2 & 4 & -1 \\ 3/2 & -2 & 1/2 \end{pmatrix} \right)$$

$$L_1 \leftarrow L_1 - L_3 \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & -9/2 & 7 & -3/2 \\ 0 & 1 & 0 & -2 & 4 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 3/2 & -2 & 1/2 \end{pmatrix}$$

$\Rightarrow A$ inversible & $\hookrightarrow A^{-1}$ □

Thm 7.15* (sans items h) et i)) Soit $A \in M_n(\mathbb{R})$. Les conditions

suivantes sont équivalentes:

- (a) A est inversible;
- (b) A est un produit (fini) de matrices élémentaires;
- (c) la FER de A est I_n ;
- (d) $\forall \vec{b} \in \mathbb{R}^n$, le SEL $A\vec{x} = \vec{b}$ est compatible déterminé;
- (e) le SEL $A\vec{x} = \vec{0}$ n'a pas de solution non triviale;
- (f) les colonnes de A forment un ensemble libre;
- (g) les colonnes de A engendrent $\mathbb{R}^n$.

(Preuve) Les équivalences $(a) \Leftrightarrow (b)$ et $(b) \Leftrightarrow (c)$ ont été déjà démontrées (voir Thm 7.12 et la Conclusion après). L'implication

$(a) \Rightarrow (d)$ a déjà été vue (voir "Pourquoi calculer des inverses?" avant § 7.3).

Pour montrer $(d) \Rightarrow (e)$, on note que $A\vec{x} = \vec{0}$ admet toujours la solution triviale $\vec{x} = \vec{0}$, avec (d) cela implique qu'il n'y a pas d'autres solutions, ce qui donne (e). En outre, on affirme aussi: que $(e) \Leftrightarrow (f)$.

En effet, une solution du SEL

$$\textcircled{1} = \underbrace{\begin{bmatrix} \vec{a}_1 & \dots & \vec{a}_n \end{bmatrix}}_A \cdot \underbrace{\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}}_{\vec{x}} \stackrel{\text{def}}{=} x_1 \vec{a}_1 + \dots + x_n \vec{a}_n,$$

colonne de A colonne de A

équivalent à un choix des coefficients $(x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$ tels que 25

$$x_1 \bar{a}_1 + \dots + x_n \bar{a}_n = 0 \quad \leftarrow \text{C.L. qui donne le vecteur nul}$$

ce qui nous dit que

$$\{ \bar{x} \in \mathbb{R}^n \mid \underbrace{[\bar{a}_1 \dots \bar{a}_n]}_A \cdot \bar{x} = 0 \} (= \text{Ker}(A)) = \{0\} \iff \{\bar{a}_1, \dots, \bar{a}_n\} \text{ libre}$$

comme on voulait démontrer (voir Point clé, page 11).

Par ailleurs, (d) $\Rightarrow$ (g). En effet, on a

$$\underbrace{[\bar{a}_1 \dots \bar{a}_n]}_A \cdot \underbrace{\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}}_{\bar{x}} \stackrel{\text{def}}{=} x_1 \bar{a}_1 + \dots + x_n \bar{a}_n$$

ce qui nous dit que, si $A\bar{x} = \bar{b}$ admet une unique solution $\forall \bar{b} \in \mathbb{R}^n$, alors tout $\bar{b} \in \mathbb{R}^n$ s'écrit comme une C.L. de $\{\bar{a}_1, \dots, \bar{a}_n\}$, i.e. $\{\bar{a}_1, \dots, \bar{a}_n\}$ engendre $\mathbb{R}^n$.

Pour montrer l'implication (e) $\Rightarrow$ (c) on remarque que si $A\bar{x} = 0$ admet uniquement la solution triviale, alors la forme échelonnée réduite de A n'a pas de variables libres, i.e. toute colonne de la FER de A possède un pivot. Comme A est une matrice carrée, cela nous dit que la FER de A est I_n , i.e. on vient de voir que (e) $\Rightarrow$ (c). Comme (c) $\Leftrightarrow$ (a) $\Rightarrow$ (d), on conclut que (a) $\Leftrightarrow$ (b) $\Leftrightarrow$ (c) $\Leftrightarrow$ (d) $\Leftrightarrow$ (e) $\Leftrightarrow$ (f).

Il reste à montrer que (g) $\Rightarrow$ (d). Il suffit de montrer que (g) $\Rightarrow$ (c). Or, (g) nous dit que le S.E.L. $A\bar{x} = \bar{b}$ admet une solution (pas forcément unique) par tout $\bar{b} \in \mathbb{R}^n$. Cela nous dit que toute ligne de FER de A admet un pivot. Comme A est carrée, on conclut que la FER de A est I_n , comme on voulait démontrer. □